

ALGEBRA LINIARA

1. Ecuatia Cayley-Hamilton
2. Puterea n a unei matrice patratice
3. Sisteme de ecuatii liniare
4. Determinanti Vandermonde
5. Probleme propuse

1. ECUATIA CAYLEY-HAMILTON (C-H)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$
$$\xrightarrow{\text{calcul}} \begin{cases} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_2 \\ A^2 - (\text{Tr}A)A + \det(A)I_2 = 0_2 \end{cases}$$

Problema 1.1 (Admitere 2009)

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

(i) Numarul solutiilor ecuatiei $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este:

A: 1; B: 0; C: 2; D: 3; E: ∞

(ii) Numarul solutiilor ecuatiei $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este:

A: 1; B: 5; C: 2; D: 0; E: ∞

(iii) Daca $A^3 = a_3A + b_3I_2$, atunci perechea (a_3, b_3) este:

A: (1,5); **B:** (21,25); **C:** (27,10); **D:** (27,15); **E:** (25,10)

(iv) Daca $A^n = a_nA + b_nI_2$, atunci:

A: $a_{n+1} = 5a_n + b_n$; **B:** $a_{n+1} = 5a_n + 2b_n$; **C:** $a_{n+1} = 3a_n + b_n$; **D:** $a_{n+1} = -5a_n + 2b_n$; **E:** $b_{n+1} = 3a_n$

Rezolvare

(i) $X^2 = A \xrightarrow{\text{propr}} \det(X^2) = \det(A) \xrightarrow{\text{propr}} (\det X)^2 = -2$,
imposibil, deoarece $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci $\det X \in \mathbb{R}$ si $(\det X)^2 \geq 0$.

(ii) $X^3 = A \xrightarrow{\text{propr}} \det(X^3) = \det(A) \xrightarrow{\text{propr}} (\det X)^3 = -2$,
imposibil. Intr-adevar, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, deci $\det X \in \mathbb{Z}$; pe de alta parte, din $(\det X)^3 = -2$, rezulta $\det X = \sqrt[3]{-2} \notin \mathbb{Z}$.

(iii) (C-H): $A^2 - (1 + 4)A + (4 - 6)I_2 = 0_2$, adica
 $A^2 - 5A - 2I_2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 = 5A + 2I_2$ (1).

Mai departe, utilizand relatia (1), obtinem: $A^3 = A^2A = 5A^2 + 2A = 5(5A + 2I_2) + 2A = 27A + 10I_2$, deci $(a_3, b_3) = (27, 10)$.

(iv) Din datele problemei, primim:

$$A^n = a_nA + b_nI_2 \quad (2)$$

$$A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_2 \quad (3)$$

Mai departe, utilizand relatiile (2) si (1), obtinem:

$A^{n+1} = A^nA = a_nA^2 + b_nA = a_n(5A + 2I_2) + b_nA$, deci

$$A^{n+1} = (5a_n + b_n)A + 2a_nI_2 \quad (4).$$

Din (3) si (4) rezulta $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ si $b_{n+1} = 2b_n$.

Problema 1.2 (Concurs Licee partenerere, 2016)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pentru fiecare pereche (a,b) de numere reale definim matricea $X(a,b) = aA - bI_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(i) $(X(a,b))^2 = 0_2$ daca si numai daca

A: $a = b = 0$; **B:** $b = 3a$; **C:** $b = -3a$; **D:** $b^2 = 9a^2$; **E:** alt raspuns

(ii) Perechea (a,b) de numere reale pentru care $X(a,b) = A^2$ este:

A: (6,9); **B:** (6, -9); **C:** (-6, -9); **D:** (-9, 6); **E:** (9, -6)

(iii) Perechea (a,b) de numere reale pentru care $X(a,b) = A^{-1}$ este:

A: $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{9}\right)$; **B:** $\left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{6}\right)$; **C:** $\left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{9}\right)$; **D:** $\left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right)$; **E:** $\left(-\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}\right)$

(iv) Daca sirurile (a_n) si (b_n) verifica relatia $X(a_n, b_n) = A^n$ pentru orice numar natural n, atunci valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ este:

A: $\frac{1}{6}$; **B:** $\frac{1}{2}$; **C:** $\frac{2}{3}$; **D:** $\frac{1}{3}$; **E:** $\frac{3}{2}$

Rezolvare

(i) Ecuatia Cayley-Hamilton este

$$A^2 - 6A + 9I_2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 = 6A - 9I_2 \quad (1).$$

Pe de alta parte, $(X(a,b))^2 = (aA - bI_2)^2 = a^2A^2 - 2abA + b^2I_2 \quad (2).$

Din (1) si (2) rezulta $(X(a,b))^2 = (6a^2 - 2ab)A - (9a^2 - b^2)I_2.$

Astfel, $(X(a,b))^2 = 0_2$ revine la egalitatile $6a^2 - 2ab = 0$ si $9a^2 - b^2 = 0$, i.e. $2a(3a - b) = 0$ si $(3a - b)(3a + b) = 0$, adica $b = 3a$.

(ii) Din relatia (1), deducem $(a,b) = (6,9)$.

- (iii) Egalitatea data revine la $aA - bI_2 = A^{-1}$. Prin inmultire cu matricea A obtinem $aA^2 - bA = I_2$, de unde primim, via (2)

$$(6a - b)A - (9a + 1)I_2 = 0_2, \text{ deci } (a, b) = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{2}{3}\right).$$

- (iv) Din relatia data deducem $A^n = a_n A - b_n I_2$ (3).

$$\text{Scriem relatia (1) sub forma } (A - 3I_2)^2 = 0_2. \text{ (4)}$$

Pe de alta parte, cu notatia $B = A - 3I_2$, din (4) rezulta

$$B^n = 0_2, \text{ pentru orice } n \geq 2 \text{ (5)}$$

Mai departe, avem succesiv, utilizand (5):

$$\begin{aligned} A^n &= (3I_2 + B)^n = C_n^0 (3I_2)^n + C_n^1 (3I_2)^{n-1} B + C_n^2 (3I_2)^{n-2} B^2 + \\ &+ \dots + C_n^n B^n = 3^n I_2 + n 3^{n-1} B = 3^n I_2 + n 3^{n-1} (A - 3I_2), \quad \text{i.e.} \\ A^n &= n 3^{n-1} A - 3^n (n-1) I_2 \text{ (6).} \end{aligned}$$

Din (3) si (6) primim $a_n = n 3^{n-1}$ si $b_n = 3^n (n-1)$, asadar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3}$$

2. PUTEREA n A UNEI MATRICE PATRATICE

2.1. Matrice de rotatie

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \xRightarrow{\text{ind}}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Generalizare

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$A = r \begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix}$$

Deoarece $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$, exista $t \in [0, 2\pi)$ astfel incat

$$\frac{a}{r} = \cos t \text{ si } \frac{b}{r} = \sin t, \text{ deci}$$

$$A = r \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \text{ asadar } A^n = r^n \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}.$$

Problema 2.1 (Admitere 2018 ; Problemele 770,771,772/TG2024)

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si $A^n = \begin{pmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) $2A - A^2$ este:

A: $A + I_2$; **B:** I_2 ; **C:** $2I_2$; **D:** 0_2 ; **E:** $A - I_2$

(ii) A^{48} este:

A: 0_2 ; **B:** $2^{12}I_2$; **C:** $2^{48}I_2$; **D:** $2^{48}A$; **E:** $2^{24}I_2$

(iii) $\frac{x_{10}^2 + y_{10}^2}{x_8^2 + y_8^2}$ este:

A: 16; **B:** 2; **C:** 8; **D:** 4; **E:** 1

Rezolvare

(i) Din ecuatia (C-H) obtinem:

$$A^2 - 2A + 2I_2 = 0_2 \Leftrightarrow 2A - A^2 = 2I_2 .$$

(ii) **Metoda 1.** Scriem A sub forma unei matrice de rotatie generalizate:

$$A = \sqrt{1+1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, \text{ de unde}$$

obtinem:

$$A^n = (\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{4} & -\sin \frac{n\pi}{4} \\ \sin \frac{n\pi}{4} & \cos \frac{n\pi}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{Astfel, } A^{48} = 2^{24} \begin{pmatrix} \cos 12\pi & -\sin 12\pi \\ \sin 12\pi & \cos 12\pi \end{pmatrix} = 2^{24} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{24} I_2.$$

Metoda 2. Calculand succesiv puterile lui A, obtinem

$$A^4 = -4I_2, \text{ deci } A^{48} = (A^4)^{12} = 2^{24} I_2.$$

(iii) **Metoda 1.** Din datele problemei si (ii), **Metoda 1**, primim:

$$x_n = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} \text{ si } y_n = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}, \text{ asadar}$$

$$x_n^2 + y_n^2 = 2^n. \text{ Astfel, } \frac{x_{10}^2 + y_{10}^2}{x_8^2 + y_8^2} = \frac{2^{10}}{2^8} = 2^2 = 4.$$

Metoda 2. Observam ca $\det(A^n) = a_n^2 + b_n^2$, deci

$$\frac{x_{10}^2 + y_{10}^2}{x_8^2 + y_8^2} = \frac{\det(A^{10})}{\det(A^8)} = \frac{(\det A)^{10}}{(\det A)^8} = (\det A)^2 = 2^2 = 4.$$

2.2 Utilizarea ecuatiei Cayley-Hamilton (C-H)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$\xrightarrow{\text{calcul}} \begin{cases} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0_2 \\ A^2 - (\text{Tr}A)A + \det(A)I_2 = 0_2 \end{cases}$$

2.2.1. Daca $\det A = 0$, atunci $A^2 = (\text{Tr}A)A = (a+d)A$
 $\xRightarrow{\text{ind}} A^n = (a+d)^{n-1}A = (\text{Tr}A)^{n-1}A, n \geq 2.$

2.2.2. Daca $\text{Tr}A = a+d = 0$, atunci $A^2 = (bc-ad)I_2 \xRightarrow{\text{ind}}$
 $A^{2n} = (bc-ad)^n I_2$ si
 $A^{2n+1} = (bc-ad)^n A$

2.3. Utilizarea unor formule de calcul matriceal

Fie $A, B \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$. Daca $AB=BA$, atunci:

(i) $A^n - B^n$
 $= (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + B^{n-1})$

(ii) $A^{2n+1} + B^{2n+1} =$
 $(A + B)(A^{2n} - A^{2n-1}B + A^{2n-2}B^2 - A^{2n-3}B^3 + \dots + B^{2n})$

(iii) **Binomul lui Newton**: $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k A^{n-k} B^k,$

unde $n \geq 1$ si $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I_k$.

OBS. Egalitatile de mai sus au loc daca, de exemplu, $B = \alpha I_k, \alpha \in \mathbb{C}$

2.3.1. Daca $A^2 + \alpha A + \alpha^2 I_k = 0_k$, atunci $A^3 = \alpha^3 I_k$, deci

$$\begin{cases} A^{3n} = \alpha^{3n} I_k \\ A^{3n+1} = \alpha^{3n} A \\ A^{3n+2} = \alpha^{3n} A^2 \end{cases}$$

Intr-adevar,

$$A^3 - (\alpha I_k)^3 = (A - \alpha I_k)(A^2 + \alpha A + \alpha^2 I_k) = 0_k$$

2.3.2. Daca $A^2 - \alpha A + \alpha^2 I_k = 0_k$, atunci $A^3 = -\alpha^3 I_k$, deci

$$\begin{cases} A^{3n} = (-1)^n \alpha^{3n} I_k \\ A^{3n+1} = (-1)^n \alpha^{3n} A \\ A^{3n+2} = (-1)^n \alpha^{3n} A^2 \end{cases}$$

Similar,

$$A^3 + (\alpha I_k)^3 = (A + \alpha I_k)(A^2 - \alpha A + \alpha^2 I_k) = 0_k$$

2.3.3. Daca $A^n + \alpha A^{n-1} + \alpha^2 A^{n-2} + \dots + \alpha^n I_k = 0_k$, atunci $A^{n+1} = \alpha^{n+1} I_k$

2.3.4 Daca $A^{2n} - \alpha A^{2n-1} + \alpha^2 A^{2n-2} - \alpha^3 A^{2n-3} + \dots + \alpha^{2n} I_k = 0_k$, atunci $A^{2n+1} = -\alpha^{2n+1} I_k$

Problema 2.2 (Simulare 2023; Problemele 973, 974, 975/TG 2024)

Fie $a \in \mathbb{C}$ si fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Multimea valorilor lui a pentru care $A^2 - 2A + I_2 = 0_2$ este:

A: $\{1, -1\}$; **B:** $\{i, -i\}$; **C:** $\{0\}$; **D:** $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$; **E:** Φ

(ii) Dacă $a=i$, atunci numărul soluțiilor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ale ecuației $AX = I_2$ este:

A: 0 ; **B:** 1 ; **C:** 2 ; **D:** 4 ; **E:** ∞

(iii) Dacă $a=i$, atunci A^{100} este:

A: $2^{99}A$; **B:** $2^{100}A$; **C:** $-2^{99}A$; ; **D:** $-2^{100}A$; **E:** O_2

Rezolvare

(i) Ecuația Cayley-Hamilton este

$A^2 - 2A + (1 + a^2) = O_2$, de unde rezulta $1 + a^2 = 1$, deci $a = 0$.

(ii) **Metoda 1.** Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Ecuația $AX = I_2$ conduce la sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + iz = 1 \\ y + it = 0 \\ -ix + z = 0 \\ -iy + t = 1 \end{cases}$$

Din prima ecuație rezulta $x = 1 - iz$, care înlocuită în ecuația a treia furnizează contradicția $-i - z + z = 0$. Așadar, ecuația matriceală $AX = I_2$ **nu** are soluții.

Metoda 2 Din egalitatea $AX = I_2$ deducem $\det(AX) = \det(I_2)$, i.e. $(\det A)(\det X) = 1$, ceea ce conduce la contradicția $0 \cdot (\det X) = 1$, așadar ecuația matriceală $AX = I_2$ **nu** are soluții.

(iii) Dacă $a=i$, atunci $\det A = 0$, de unde (conform observației **2.2.1.** de mai sus) obținem $A^n = (a + d)^{n-1}A = (\text{Tr}A)^{n-1}A$, deci $A^{100} = 2^{99}A$

Problema 2.3 (Simulare 2021 ; Problemele 853, 854, 855/TG 2024)

Se considera matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(i) Determinantul matricei A este

A: 1; B: 0; C: 2; D: 7; E: 3

(ii) $(A - I_3)^2$ este:

A: I_3 ; B: 0_3 ; C: A; D: $A - I_3$; E: $-I_3$

(iii) A^{2021} este:

A: $A - I_3$; B: 0_3 ; C: $A + 2020 I_3$; D: $2021A - 2020I_3$; E: $2020A + 2021I_3$

Rezolvare

(i) Calcul direct

(ii) $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, urmat de calcul direct.

(iii) **Metoda 1.**

Din (ii) rezulta $A^2 = 2A - I_3$, de unde deducem succesiv

$$A^3 = A^2 \cdot A = (2A - I_3)A = 2(2A - I_3) - A = 3A - 2I_3$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (3A - 2I_3)A = 3(2A - I_3) - 2A = 4A - 3I_3$$

Prin inductie, $A^n = nA - (n - 1)I_3$, deci $A^{2021} = 2021A - 2020I_3$.

Metoda 2. Notand $B = A - I_3$, din (ii) rezulta

$$B^n = 0_3, \text{ pentru orice } n \geq 2 \quad (1).$$

Mai departe, utilizand (1) obtinem:

$$\begin{aligned} A^n &= (I_3 + B)^n = C_n^0 (I_3)^n + C_n^1 (I_3)^{n-1} B + C_n^2 (I_3)^{n-2} B^2 + \\ &+ \dots + C_n^n B^n = I_3 + n B = I_3 + n (A - I_3), \quad \text{i.e.} \\ A^n &= n A - (n - 1) I_3. \end{aligned}$$

Problema 2.4 (Admitere 2019; Problema 821/TG 2024)

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice inversabila astfel incat $A + A^{-1} = I_2$.

Matricea $I_2 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2019}$ este:

A: $2A - I_2$; **B:** $2A + I_2$; **C:** $-2A + I_2$; **D:** $-2A - I_2$; **E:** $A + I_2$

Rezolvare.

Inmultind egalitatea data cu A, obtinem: $A^2 + I_2 = A$, deci

$$A^2 = A - I_2 \quad (1)$$

De aici, obtinem :

$$A^3 = A^2 \cdot A \stackrel{(1)}{\implies} A^3 = (A - I_2)A = A^2 - A \stackrel{(1)}{\implies} A^3 = -I_2$$

Obs. Egalitatea $A^3 = -I_2$ se putea deduce, similar cu **Ex. 3.5**, astfel:

$$A^3 + I_2 = A^3 + (I_2)^3 = (A + I_2)(A^2 - A + I_2) = (A + I_2) \cdot 0_2 = 0_2, \text{ utilizand } (1).$$

Asadar,

$$A^3 = -I_2 \implies A^4 = A^3 \cdot A = -A, \quad A^5 = -A^2, \quad A^6 = I_2 \quad (2)$$

Astfel, din (2) rezulta:

$$I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = I_2 + A + A^2 - I_2 - A - A^2 = 0_2 \quad (3)$$

Mai departe obtinem, succesiv:

$$\begin{aligned} I_2 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2019} &= (I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) + \\ &+ (A^6 + A^7 + A^8 + A^9 + A^{10} + A^{11}) + \dots + (A^{2010} + A^{2011} + A^{2012} + \\ &+ A^{2013} + A^{2014} + A^{2015}) + (A^{2016} + A^{2017} + A^{2018} + A^{2019}) = (I_2 + \\ &+ A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) + A^6(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) + \dots + \\ &+ A^{2010}(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) + A^{2016}(I_2 + A + A^2 + A^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(3)\&(2)} I_2 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2019} &= 0_2 + A^6 \cdot 0_2 + \dots + \\ A^{2010} \cdot 0_2 + (A^6)^{372} (I_2 + A + A^2 + A^3) &= I_2 (I_2 + A + A^2 + A^3) = \\ I_2 + A + A^2 + A^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(1)\&(2)} I_2 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2019} &= I_2 + A + A^2 + A^3 = I_2 + \\ A + A - I_2 - I_2 &= 2A - I_2. \end{aligned}$$

Problema 2.5. (Simulare 2019; Problemele 795, 796, 797/TG 2024)

Fie ε radacina pozitiva a ecuatiei $x^2 - x - 1 = 0$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon & \frac{1}{\varepsilon} \\ 1 & \varepsilon - 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

(i) ε^3 este:

A: $\varepsilon - 2$; **B:** $2\varepsilon - 1$; **C:** $2\varepsilon + 1$; **D:** $-\varepsilon + 2$; **E:** ε

(ii) $\det(A^{2019})$ este:

A: 1; **B:** 0; **C:** 2019; **D:** -1 ; **E:** 2

(iii) Matricea A^{2019} este:

A: εI_2 ; **B:** $-A$; **C:** I_2 ; **D:** $-\varepsilon I_2$; **E:** A

Rezolvare.

(i) Din $\varepsilon^2 - \varepsilon - 1 = 0$ rezulta

$$\varepsilon^2 = \varepsilon + 1 \quad (1),$$

de unde primim $\varepsilon^3 = \varepsilon^2 \cdot \varepsilon = (\varepsilon + 1) \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 + \varepsilon = \varepsilon + 1 + \varepsilon = 2\varepsilon + 1.$

(ii) Din (1), prin inmultire cu $\frac{1}{\varepsilon}$, primim $\varepsilon = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$, i.e.

$$\varepsilon - 1 = \frac{1}{\varepsilon} \quad (2)$$

Astfel, $\det A = -(\varepsilon - 1)^2 - \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{(2)\&(1)} \det A = -\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon^2} = -1$.

(iii) Ecuatia (C-H) asociata matricei A este:

$$A^2 - 0 \cdot A + (-1)I_2 = 0_2, \text{ i.e. } A^2 = I_2.$$

Astfel, $A^{2019} = A^{2018} \cdot A = (A^2)^{1009} \cdot A = (I_2)^{1009} \cdot A = I_2 \cdot A = A$.

3. SISTEME DE ECUATII LINIARE

Se considera un sistem linar de m ecuatii cu n necunoscute. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ matricea sistemului si $\bar{A} \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{C})$ matricea sa extinsa.

Notiuni utilizate

Sistem compatibil $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ *are cel putin o solutie*

Sistem compatibil determinat $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ *are exact o solutie* \iff *are solutie unica*

Sistem incompatibil $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ *nu are nici o solutie*

Sistem compatibil nedeterminat $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ *are o infinitate de solutii*

OBS. Dacă sistemul liniar are coeficienții într-un corp comutativ K , de exemplu $K = \mathbb{Z}_p$, atunci sistemul este *compatibil nedeterminat* dacă are cel puțin două soluții.

3.1. Sisteme liniare de n ecuații cu n necunoscute

În acest caz, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- (i) Sistemul este *compatibil determinat* \iff
 $\iff \det(A) \neq 0 \iff \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = n$
- (ii) Sistemul este *compatibil nedeterminat* \iff
 $\iff \text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) < n \iff$
 $\iff \det(A) = 0$ și $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$
- (iii) Sistemul este *incompatibil* $\iff \text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A})$
Obs. $\text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A}) \implies \det(A) = 0$

3.2. Sisteme liniare și omogene de n ecuații cu n necunoscute

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea sistemului.

- (i) Sistemul este *compatibil determinat* (adică are numai soluția nulă sau banală) $\iff \det(A) \neq 0$
- (ii) Sistemul este *compatibil nedeterminat* (are și soluții nenule) $\iff \det(A) = 0$.

3.3. Sisteme liniare de m ecuații cu n necunoscute

- (i) Sistemul este *compatibil* $\iff rang(A) = rang(\bar{A})$
(Kronecker-Capelli)
- (ii) Sistemul este *compatibil determinat* \iff
 $rang(A) = rang(\bar{A}) = n$
Obs. $rang(A) = rang(\bar{A}) = n \implies m \geq n$
- (iii) Sistemul este *compatibil nedeterminat* \iff
 $rang(A) = rang(\bar{A}) < n$
- (iv) Sistemul este *incompatibil* $\iff rang(A) < rang(\bar{A})$

3.4. Sisteme liniare si omogene de m ecuatii cu n necunoscute

- (i) Sistemul este *compatibil determinat* (adica are numai solutia nula sau banala) $\iff rang(A)=n$
- (ii) Sistemul este *compatibil nedeterminat* (are si solutii nenule) $\iff rang(A) < n$

Problema 3.1 (Admitere 2023; Problemele 1005, 1006, 1007/TG 2024)

Pentru $a \in \mathbb{R}$ se considera sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ -2x + az = -2 \\ -x + 3y - z = -1 \end{cases},$$

in necunoscutele x, y, z , iar prin A se noteaza matricea sistemului.

- (i) Multimea valorilor lui a pentru care $rang A = 3$ este:

A: $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$; **B:** Φ ; **C:** $\{-3, -2\}$; **D:** $\{2, 3\}$; **E:** $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

(ii) Numarul valorilor lui a pentru care sistemul admite o infinitate de solutii este:

A: 0; **B:** 1; **C:** 2; **D:** 3; **E:** ∞

(iii) Numarul valorilor lui a pentru care sistemul admite solutie, cu x, y, z in progresie aritmetica, in aceasta ordine, este:

A: 0; **B:** 1; **C:** 2; **D:** 4; **E:** ∞

Rezolvare.

(i) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului dat.

Avem $\text{rang } A = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Adunand linia 1 la linia 3, primim: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 0 & -a \\ 0 & a+3 & -0 \end{vmatrix} =$
 $-(a+3)(a+2)$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

(ii) Sistemul trebuie sa fie compatibil nedeterminat, deci

$$\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} < 3.$$

Din $\text{rang } A < 3$ rezulta $\det(A) = 0$, asadar $a \in \{-3, -2\}$.

Cazul 1: $a = -3$.

Observam ca $\text{rang } A = 2$, determinantul principal fiind, de exemplu

$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$. Matricea extinsa a sistemului este

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conditia $\text{rang } \bar{A} = 2$ revine la $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, ceea ce este adevarat, deoarece linia 3 este opusa liniei 1.

Asadar, pentru $a = -3$, sistemul admite o infinitate de solutii.

Cazul 2: $a = -2$.

Observam ca $\text{rang } A = 2$, determinantul principal fiind, de exemplu

$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$. Matricea extinsa a sistemului este

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Conditia $\text{rang } \bar{A} = 2$ revine la $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$, ceea ce este adevarat, deoarece coloana 3 eseste identica cu coloana 1.

Asadar, pentru $a = -2$, sistemul admite, de asemenea, o infinitate de solutii.

In concluzie, numarul valorilor lui a pentru care sistemul admite o infinitate de solutii este **2** ($a = -2$ si $a = -3$).

Observatie. Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$ sistemul este compatibil determinat (are solutie unica), iar pentru $a \in \{-3, -2\}$ sistemul este compatibil nedeterminat. Nu exista valori ale lui a pentru care sistemul sa fie incompatibil.

(iii) Conditia de progresie aritmetica este

$$y = \frac{x+z}{2} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0 \quad (I)$$

Metoda 1.

Cazul 1. Daca $\mathbf{a} \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$, atunci sistemul are solutie unica, care se poate determina prin regula lui Cramer sau utilizand combinatii liniare de ecuatii (de exemplu, adunand prima si a treia ecuatie).

Mai direct, observam ca, in cazul general, coloana necunoscutelor \mathbf{x} coincide cu coloana termenilor liberi, ceea ce arata ca o solutie a sistemului (in cazul nostru *unica solutie*) este $\mathbf{x} = \mathbf{1}, \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Deoarece conditia $y = \frac{x+z}{2}$ nu este indeplinita, deducem ca in acest caz, nu exista \mathbf{a} pentru care sa avem progresie aritmetica.

Cazul 2. Fie $\mathbf{a} = -3$.

Rezolvam sistemul (compatibil nedeterminat)

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -2x - 3z = -2 \\ -x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

Luam primele doua ecuatii drept ecuatii principale si pe z drept necunoscuta secundara.

Obtinem $x = 1 - \frac{3t}{2}, y = -\frac{t}{6}, z = t$, iar din conditia de progresie aritmetica $2y = x + z$, rezulta $t = 6$, deci $x = -8, y = -1, z = 6$.

Asadar $\mathbf{a} = -3$ este solutie a problemei.

Cazul 3. Fie $\mathbf{a} = -2$.

Rezolvam sistemul (compatibil nedeterminat)

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x - 2z = -2 \\ -x + 3y - z = -1 \end{cases}$$

Adunand prima si ultima ecuatie, primim $y = 0$, iar sistemul se reduce la ecuatia $x + z = 1$. Intrucat conditia de progresie aritmetica $2y = x + z$ i.e. $0 = 1$ nu este indeplinita, rezulta ca $\mathbf{a} = -2$ *nu* este solutie a problemei.

In concluzie, *singura* valoare acceptabila este $a = -3$.

Raspuns corect B.

Metoda 2.

Atasam sistemului dat conditia (1) de progresie aritmetica.

Obtinem sistemul de 4 ecuatii cu 3 necunoscute x, y, z si parametrul a :

$$(S) \begin{cases} x + ay + z = 1 \\ -2x + az = -2 \\ x + 3y - z = -1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Fie $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului si

$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -2 & 0 & a & -2 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea sa extinsa.

Observam ca $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$, deci

$$\mathbf{rang}(\mathcal{A}) \leq 3 \quad (2).$$

Pe de alta parte, conditia de compatibilitate a sistemului (impusa de cerintele problemei), anume

$$\mathbf{rang}(\mathcal{A}) = \mathbf{rang}(\bar{\mathcal{A}}) \quad (3),$$

impreuna cu relatia (2), conduce la egalitatea

$$\mathbf{det}(\bar{\mathcal{A}}) = 0 \quad (4)$$

Intr-adevar, daca $\det(\bar{\mathcal{A}}) \neq 0$, atunci $\text{rang}(\bar{\mathcal{A}}) = 4$, ceea ce, alaturi de relatiile (2) si (3), furnizeaza contradictia $\text{rang}(\mathcal{A}) = 4 \leq 3$.

Sa calculam $\det(\bar{\mathcal{A}})$. Adunand linia 3 la liniile 1 si 4, obtinem

$$\det(\bar{\mathcal{A}}) = \begin{vmatrix} 0 & a+3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & a & -2 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+2} \cdot (a+3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & a & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (a+3)(a+2) \quad (5)$$

Din (4) si (5), rezulta $a \in \{-3, -2\}$.

Verificam conditia $\text{rang}(\mathcal{A}) = \text{rang}(\bar{\mathcal{A}})$

Pentru $a = -3$, $\text{rang}(\mathcal{A}) = 3$, alegand $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Pe de alta parte, $\det(\bar{\mathcal{A}}) = 0$, deci $\text{rang}(\mathcal{A}) = \text{rang}(\bar{\mathcal{A}}) = 3$.

Pentru $a = -2$, sistemul corespunzator (S) de mai sus este:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ -2x - 2z = -2 \\ -x + 3y - z = -1 \\ x - 2y + z = 0, \end{cases}$$

iar prima si ultima sa ecuatie conduc la contradictia $0 = 1$.

De altfel, se poate constata ca $\text{rang}(\mathcal{A}) = 2$, iar $\text{rang}(\bar{\mathcal{A}}) = 3$,

deci sistemul este incompatibil.

In concluzie, *singura* valoare a lui a pentru care sistemul dat admite solutie, cu x, y, z in progresie aritmetica, in aceasta ordine, este $a = -3$.

Raspuns corect B.

4. DETERMINANTI VANDERMONDE

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$V(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Problema 4.1 (Problema 189/TG2024)

Multimea solutiilor reale ale ecuatiei

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^3 & -1 & 8 \\ 1 & x^2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ este:}$$

A: $\{-1,1,2\}$; **B:** $\mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}$; **C:** $\{-1,1-2\}$; **D:** Φ ; **E:** $D\{1\}$

Rezolvare

Schimband intre ele liniile 3 si 4, obtinem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^3 & -1 & 8 \\ 1 & x^2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^2 & 1 & 4 \\ 1 & x^3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -V(1, x, -1, 2) =$$

$-1(x-1)(-1-1)(2-1)(-1-x)(2-x)(2+1) = 6(x-1)(x+1)(2-x) = 0$, deci $x \in \{-1,1,2\}$. Raspuns corect: **A**.

Problema 4.2 (Problema 48/TG2024)

Determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{vmatrix}$ este:

A: $16i$; **B:** $-16i$; **C:** 16 ; **D:** -16 ; **E:** 0

Rezolvare

$\Delta = V(1, -i, -1, i) = (-i-1)(-1-1)(i-1)(-1+i)(i+i)(i+1) = 16i$; raspuns corect **A**.

5. PROBLEME PROPUSE

5.1. (Problema 57/TG2024)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix}, a < b < c.$$

A: $D=0$; **B:** $D \leq 0$; **C:** $D < 0$; **D:** $D > 0$; **E:** $D = -a^2 - b^2 - c^2$

Rezolvare

Scazand linia 1 din linia 2, obtinem:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & b+1 & c+1 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \end{vmatrix} = V(a+1, b+1, c+1) = (b+1-a-1)(c+1-a-1)(c+1-b-1) = (b-a)(c-a)(c-b) > 0,$$

deci raspuns corect **D**.

5.2. (Admitere 2006; a se vedea si problemele 181, 182, 183/
TG2024)

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(i) Numarul solutiilor inversabile $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale ecuatiei $X^{2006} = A$ este:

A: 2006; **B:** 1003; **C:** 0; **D:** ∞ ; **E:** 2

(ii) Numarul solutiilor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale ecuatiei $X^{2006} = A$ este:

A: 2006; **B:** 1003; **C:** 0; **D:** ∞ ; **E:** 2

(iii) Numarul solutiilor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ale ecuatiei $X^{2006} = A$ este:

A: 2006; **B:** 1003; **C:** 0; **D:** ∞ ; **E:** 2

Rezolvare

(i) Trecand la determinant, similar cu **Ex.1.1**, primim $\det(X)=0$, deci nu exista inversa matricei X.

(ii) Deoarece $\det(X)=0$, in conformitate cu **2.2.1.**, obtinem

$$X^n = (a + d)^{n-1}X = (\text{Tr}A)^{n-1}X, \quad n \geq 2,$$

unde $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Astfel, ecuatia $X^n = A$ devine

$$(a + d)^{n-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

adica
$$\begin{cases} a(a + d)^{n-1} = 2 \\ b(a + d)^{n-1} = 3 \\ c(a + d)^{n-1} = 4 \\ d(a + d)^{n-1} = 6 \end{cases}$$

Adunand prima si ultima ecuatie, obtinem

$$(a + d)^n = 8 \Leftrightarrow (\text{Tr}X)^n = \text{Tr}A.$$

Astfel, pentru (ii), rezulta $(a + d)^{2006} = 8$, cu $a, d \in \mathbb{R}$, asadar $a + d = \pm \sqrt[2006]{8}$, ceea ce conduce la doua solutii (a,b,c,d) ale sistemului de mai sus, deci la **doua** matrice X.

(iii) Similar cu (ii), ecuatia binoma $(a + d)^{2006} = 8$, cu $a, d \in \mathbb{C}$, are **2006** solutii complexe, ceea ce conduce la **2006** solutii (a,b,c,d) ale sistemului de mai sus, deci la **2006** matrice X.

5.3. (Admitere 2016; a se vedea si problema 230/ TG2024)

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice nenula astfel incat $A^{2016} = 0_2$. Cardinalul multimii $\{A^n/n \geq 1\}$ este:

A: 2016; **B:** 1008; **C:** 0; **D:**2; **E:** ∞

Rezolvare

Din $A^{2016} = 0_2$ rezulta $\det(A^{2016}) = \det(0_2)$,

deci $(\det A)^{2016} = 0$ i.e. $\det A = 0$. In conformitate cu [2.2.1.](#) si ipoteza $A^{2016} = 0_2$, obtinem $A^{2016} = (\text{Tr}A)^{2015}A = 0_2$. Deoarece $A \neq 0_2$, deducem $\text{Tr}A=0$.

Din relatiile $\det A = \text{Tr} A = 0$, utilizand ecuatiile (C-H)

$$A^2 - (\text{Tr}A)A + \det(A)I_2 = 0_2 ,$$

deducem $A^2 = 0_2$, deci $A^n = 0_2, \forall n \geq 2$.

Astfel, $M = \{A, A^2\} = \{0_2, A\}$, asadar M are [2 elemente](#).

[5.4.](#) (Test admitere ; Problema 672/TG2023)

Numarul solutiilor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ale ecuatiei $X^{25} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ este:

A: 2; **B:** 0; **C:** 10; **D:**25; **E:** ∞

Rezolvare

Similar cu [Ex. 2.2](#) primim $\det(X) = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 0$ si $(\text{Tr}X)^{25} = \text{Tr} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 0$, i.e. $\text{Tr}X = 0$. Din ecuatiile (C-H) rezulta $X^2=0_2$, deci $X^{25}=0_2$, ceea ce contrazice ipoteza problemei $X^{25} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Asadar, [nu exista](#) nici o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care sa fie solutie a ecuatiei date.

[5.5.](#) (Simulare 2018; 744/ TG2024)

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel incat $A^2 - \lambda A + \lambda^2 I_2 = 0_2$.

Matricea A^{2018} este:

A: $\lambda^{2018}I_2$; **B:** A ; **C:** $\lambda^{2016}A^2$; **D:** λ^2A^2 ; **E:** 0_2

Rezolvare

Avem $A^3 + (\lambda I_2)^3 = (A + \lambda I_2)(A^2 - \lambda A + \lambda^2 I_2) = (A + \lambda I_2)0_2 = 0_2$, deci $A^3 = -(\lambda I_2)^3 = -\lambda^3 I_2$.

Mai departe, $A^{2018} = A^{2016}A^2 = (A^3)^{672}A^2 = (-\lambda^3 I_2)^{672}A^2 = (-1)^{672}(\lambda^3)^{672}(I_2)^{672}A^2 = \lambda^{2016}I_2A^2 = \lambda^{2016}A^2$.

5.6. (Admitere 2011; a se vedea si problema 173/ TG2024)

Fie $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(i) Numarul $a \in \mathbb{R}$ pentru care $aA - A^2 = I_2$ este:
A: 1; **B:** 3; **C:** 0; **D:** 2; **E:** -1

(ii) $A + A^{-1}$ este:
A: $2I_2$; **B:** $3A$; **C:** A^2 ; **D:** 0_2 ; **E:** Nu exista A^{-1}

(iii) $A^{2011} + (A^{-1})^{2011}$ este:
A: $A + I_2$; **B:** $3A$; **C:** A^2 ; **D:** 0_2 ; **E:** $2I_2$

Rezolvare.

(i) Ecuația (C-H) este: $A^2 - 2A + I_2 = 0_2$, i.e.
 $2A - A^2 = I_2$, deci $a = 2$.

(ii) Din $A^2 - 2A + I_2 = 0_2$, prin înmulțire cu A^{-1} (inversa există deoarece $\det A = 1 \neq 0$), rezulta $A^2A^{-1} - 2AA^{-1} + I_2A^{-1} = 0_2$, deci $A - 2I_2 + A^{-1} = 0_2$.

Astfel, $A + A^{-1} = 2I_2$.

(iii) **Metoda 1**

Din $A + A^{-1} = 2I_2$, prin ridicare la patrat, obtinem

$$A^2 + (A^{-1})^2 + 2AA^{-1} = 4I_2, \text{ deci } A^2 + (A^{-1})^2 = 2I_2.$$

Se demonstreaza prin metoda inductiei matematice relatia

$$A^n + (A^{-1})^n = 2I_2, \forall n \geq 1.$$

Metoda 2

Scriem ecuatia (C-H) de la (i) sub forma $(A - I_2)^2 = 0_2$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Astfel, primim: } (A^k - I_2)^2 &= (A^k - I_2^k)^2 = \\ &= [(A - I_2)(A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + A + I_2)]^2 = \\ &= (A - I_2)^2 (A^{k-1} + A^{k-2} + \dots + A + I_2)^2, \quad \text{de unde obtinem, via (2):} \\ (A^k - I_2)^2 &= 0_2, \text{ i.e. } A^{2k} - 2A^k + I_2 = 0_2. \end{aligned}$$

Prin inmultire cu $(A^{-1})^k$, deducem $A^k + (A^{-1})^k = 2I_2, \forall k \geq 1$.

5.7. (Problema 21/ TG2024)

Fie P, Q, R functii de grad cel mult 2 si a, b, c numere complexe date.

Se considera determinantii:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(1) & Q(1) & R(1) \end{vmatrix}$$

Daca $\Delta_0 = 1$, atunci $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ este:

A: 0; **B:** 1; **C:** 3; **D:** $P(0) + Q(0) + R(0)$; **E:** $P(1)Q(1)R(1)$

Rezolvare.

Fie $x \in \mathbb{R}$ si

$$H(x) = \begin{vmatrix} P(x) & Q(x) & R(x) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(x) & Q(x) & R(x) \\ P(c) & Q(c) & R(c) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P(a) & Q(a) & R(a) \\ P(b) & Q(b) & R(b) \\ P(x) & Q(x) & R(x) \end{vmatrix}$$

Avem $H(a) = \Delta_0 + 0 + 0 = \Delta_0 = 1$; analog $H(b) = 1$ si $H(c) = 1$ **(1)**

Pe de alta parte, observam ca H este o functie de gradul doi,

$$H(x) = mx^2 + nx + p \quad \mathbf{(2)}$$

si $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = H(1)$ **(3)** .

Relatiile **(1)** & **(2)** conduc la sistemul linear $\begin{cases} ma^2 + na + p = 1 \\ mb^2 + nb + p = 1 \\ mc^2 + nc + p = 1 \end{cases}$,

cu necunoscutele m, n, p . Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -V(a, b, c) = -(b - a)(c - a)(c - b)$$

Deoarece $\Delta_0 = 1 \neq 0$, rezulta ca numerele a, b, c sunt distincte intre ele. De aici deducem ca $\Delta \neq 0$, deci sistemul de mai sus are solutie unica, pe care o determinam cu regula lui Cramer.

Astfel, $\Delta_m = 0$ ($col\ 1 = col\ 3$), $\Delta_n = 0$ ($col\ 2 = col\ 3$) si $\Delta_p = \Delta$, deci $m = \frac{\Delta_m}{\Delta} = 0$, $n = \frac{\Delta_n}{\Delta} = 0$ si $p = \frac{\Delta_p}{\Delta} = 1$, de unde obtinem, via **(2)**,

$$H(x) = mx^2 + nx + p = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

In final, utilizand **(3)**, obtinem $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = H(1) = 1$.

5.8 (Admitere 2010 ; a se vedea si problema 65/ TG2024)

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si $A^n = \begin{pmatrix} a_n & -b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) A^2 este:

A: $2A$; **B:** $2A + 4I_2$; **C:** I_2 ; **D:** 0_2 ; **E:** $2A - 4I_2$

(ii) A^{48} este:

A: $2^{24}I_2$; **B:** $-2^{24}I_2$; **C:** I_2 ; **D:** $2^{48}I_2$; **E:** $-2^{48}I_2$

(iii) $\frac{a_{20}^2 + b_{20}^2}{a_{10}^2 + b_{10}^2}$ este:

A: 2^{15} ; **B:** 2^5 ; **C:** 1 ; **D:** 2^{10} ; **E:** 2^{20}

(iv) Numarul valorilor $n \geq 1$ pentru care $A^n = 8I_2$ este:

A: 3 ; **B:** 0 ; **C:** 1 ; **D:** 2 ; **E:** ∞

Rezolvare

(i) Din ecuatia (C-H) obtinem:

$$A^2 - 2A + 4I_2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 = 2A - 4I_2 .$$

(ii) **Metoda 1.** Scriem A sub forma unei matrice de rotatie generalizate:

$$A = \sqrt{1+3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}, \text{ de unde obtinem:}$$

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} & -\sin \frac{n\pi}{3} \\ \sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Astfel, } A^{48} = 2^{48} \begin{pmatrix} \cos 16\pi & -\sin 16\pi \\ \sin 16\pi & \cos 16\pi \end{pmatrix} = 2^{48} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2^{48} I_2.$$

Metoda 2. Din ecuatia (C-H) rezulta

$$A^2 - 2A + 2^2 I_2 = 0_2 , \text{ de unde obtinem:}$$

$$A^3 + (2I_2)^3 = (A + 2I_2)(A^2 - 2A + 2^2 I_2) = (A + 2I_2)0_2 = 0_2, \text{ deci } A^3 = (-2I_2)^3 = -8I_2.$$

$$\text{Astfel, } A^{48} = (A^3)^{16} = (-2^3 I_2)^{16} = 2^{48} I_2.$$

(iii) **Metoda 1.** Din datele problemei si (ii), **Metoda 1**, primim:

$$a_n = 2^n \cos \frac{n\pi}{3} \text{ si } b_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{3}, \text{ asadar}$$

$$a_n^2 + b_n^2 = 2^{2n}. \text{ Astfel, } \frac{a_{20}^2 + b_{20}^2}{a_{18}^2 + b_{18}^2} = \frac{2^{40}}{2^{36}} = 2^4.$$

Metoda 2. Observam ca $\det(A^n) = a_n^2 + b_n^2$, deci

$$\frac{a_{20}^2 + b_{20}^2}{a_{18}^2 + b_{18}^2} = \frac{\det(A^{20})}{\det(A^{18})} = \frac{(\det A)^{20}}{(\det A)^{18}} = (\det A)^2 = 2^4.$$

(iv) **Metoda 1.**

$$A^n = 8I_2 \stackrel{(ii), \text{ Met.1}}{\iff} 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} & -\sin \frac{n\pi}{3} \\ \sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff 2^n \cos \frac{n\pi}{3} = 8 \wedge 2^n \sin \frac{n\pi}{3} = 0 \iff 2^n \cos \frac{n\pi}{3} = 8 \wedge$$

$$\frac{n\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{N} \iff n = 3k, 2^{3k} \cos(k\pi) = 8 \iff$$

$2^{3k} (-1)^k = 8 \iff (-8)^k = 8, k \in \mathbb{N}$, ceea ce este imposibil, deoarece $8 \notin \{(-8)^k / k \in \mathbb{N}\}$.

Metoda 2. Din (ii), Metoda 2, rezulta $A^3 = -8I_2$, de unde deducem

$$\begin{cases} A^{3k} = (-8)^k I_2 \\ A^{3k+1} = (-8)^k A \\ A^{3k+2} = (-8)^k A^2 \end{cases}$$

In nici una dintre aceste situatii nu putem primi $A^n = 8I_2$.

5.9 Admitere 2022 (Problemele 939, 940, 941 / TG2024)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Valoarea lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $A^2 = xA$ este:

A: 5 ; **B:** 1 ; **C:** 2; **D:** 6; **E:** 3

(ii) A^{2022} este:

A: $5^{2021}A$; **B:** $5A$; **C:** $5^{2021}I_2$; **D:** $6^{2021}A$; **E:**

(iii) $\det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2022})$ este:

A: 0 ; **B:** 2022 ; **C:** 5^{4044} ; **D:** $\frac{5^{2023}-1}{4}$; **E:** 6^{2023}

Rezolvare

(i) Din ecuatia (C-H) obtinem

$$A^2 - 5A + 0 \cdot I_2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 = 5A.$$

(ii) Din sectiunea 2.2.1, obtinem

$$A^n = (a + d)^{n-1}A = (\text{Tr}A)^{n-1}A, \\ \text{deci } A^{2022} = 5^{2021}A.$$

(iii) Avem $\det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2022}) = \det[A(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2021})] = \det(A) \cdot \det(A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2021}) = 0$, deoarece $\det(A) = 0$.

5.10 Admitere 2019 (Problemele 823, 824 / TG2024)

Se considera sistemul de ecuatii liniare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}, \text{ cu } a, b \text{ numere reale.}$$

(i) Sistemul este compatibil determinat daca si numai daca :

A: $a \neq \frac{2}{3}$; **B:** $a = \frac{2}{3}$; **C:** $a \neq \frac{3}{2}$; **D:** $a = \frac{3}{2}$; **E:** $a \neq 2$

(ii) Sistemul este compatibil nedeterminat daca si numai daca :

A: $a = \frac{2}{3}, b = 2$; **B:** $a = \frac{2}{3}, b \neq 2$; **C:** $a = \frac{3}{2}, b = 2$;

$$\mathbf{D}: a = \frac{2}{3}, b = 3; \mathbf{E}: a \neq \frac{2}{3}, b = 2$$

Rezolvare

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ matricea sistemului dat si

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ matricea sa extinsa.

(i) Din 3.1.(i) avem conditia $\det(A) \neq 0$, i.e. $3a - 2 \neq 0$, deci $a \neq \frac{2}{3}$.

(ii) Din 3.1.(ii) avem conditiile $\det(A) = 0$ si $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$. Astfel, $a = \frac{2}{3}$ si $\text{rang } A = 2$, alegand $\Delta_p =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0. \text{ Mai departe,}$$

$$\text{rang}(\bar{A}) = \text{rang } A = 2 \Leftrightarrow \Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ i.e.}$$

$$2 - b = 0 \Leftrightarrow b = 2. \text{ Asadar, } a = \frac{2}{3} \text{ si } b = 2.$$

5.11. (Admitere 2021 ; Problemele 884, 885/ TG2024)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(iv) A^{2022} este:

$$\mathbf{A}: 4^{2021}A; \mathbf{B}: 0_2; \mathbf{C}: 4A; \mathbf{D}: 4^{2022}A; \mathbf{E}: 4^{2022}I_2$$

(v) Numarul matricelor $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifica ecuatia $X^{2022} = A$ este:

$$\mathbf{A}: 1; \mathbf{B}: 2022; \mathbf{C}: 2; \mathbf{D}: 0; \mathbf{E}: 4$$

Rezolvare

(i) Ecuația Cayley-Hamilton este

$$A^2 = 4A, \text{ de unde rezulta } A^n = 4^{n-1}A, \text{ deci } A^{2022} = 4^{2021}A.$$

(ii) Din $X^{2022} = A$ rezulta $\det(X^{2022}) = \det A$, deci $(\det X)^{2022} = 0$.

Astfel, $\det X = 0$ și, în conformitate cu 3.2.1., obținem

$$X^n = (a + d)^{n-1}X = (\text{Tr}A)^{n-1}X, \quad n \geq 2,$$

$$\text{unde } X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ecuația $X^{2022} = A$ devine

$$(a + d)^{2021} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \text{ adică } \begin{cases} a(a + d)^{2021} = 2 \\ b(a + d)^{2021} = -4 \\ c(a + d)^{2021} = -1 \\ d(a + d)^{2021} = 2 \end{cases}$$

Adunând prima și ultima ecuație, obținem

$$(a + d)^{2022} = 4 \Leftrightarrow (\text{Tr}X)^{2022} = \text{Tr}A, \text{ de unde rezulta două soluții reale,}$$

$a + d = \sqrt[2022]{4}$ și $a + d = -\sqrt[2022]{4}$, deci ecuația $X^{2022} = A$ are două soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Observație. Ecuația $(a + d)^{2022} = 4$ are 2022 soluții distincte în \mathbb{C} , asadar ecuația $X^{2022} = A$ are 2022 soluții distincte în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5.12. (Admitere 2017; Problemele 715, 716, 717/ TG2024)

Se considera sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} ax + y + z = -1 \\ x + ay + z = -a \\ x + y - z = -2 \end{cases}, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

(iv) Determinantul sistemului este:

$$\mathbf{A}: a^2; \mathbf{B}: a^2 + 2a - 3; \mathbf{C}: a^2 - 2a + 3; \mathbf{D}: -a^2 - 2a + 3; \mathbf{E}: 2a + 3$$

(v) Sistemul este incompatibil dacă și numai dacă:

$$\mathbf{A}: a = -1; \mathbf{B}: a = 1; \mathbf{C}: \text{alt raspuns}; \mathbf{D}: a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}; \mathbf{E}: a = -3$$

(vi) Numarul valorilor reale ale parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul admite solutii (x, y, z) , cu x, y, z in progresie aritmetica, in aceasta ordine, este:

A: 0; **B:** 3; **C:** 1; **D:** 2; **E:** ∞

Rezolvare.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului dat si

$\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ matricea sa extinsa.

(i) Prin calcul direct, rezulta $\det A = -a^2 - 2a + 3$.

(ii) Ecuatia $\det A = 0$ are solutiile -3 si 1 .

Daca $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$, atunci sistemul este compatibil determinat.

Daca $a = 1$, atunci $\text{rang } A = 2$, alegand $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, la intersectia liniilor 2 si 3 si a coloanelor 2 si 3. Mai departe,

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ (liniile 1 si 2 sunt egale). Astfel, $\text{rang } A =$

$\text{rang } \bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Daca $a = -3$, atunci $\text{rang } A = 2$, luand acelasi Δ_p ca la situatia $a = 1$.

In acest caz, $\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, deci

$\text{rang } \bar{A} = 3 \neq \text{rang } A$.

Asadar, $a = -3$ este singura valoare a lui a pentru care sistemul dat este incompatibil.

(iii) Conditia de progresie aritmetica $y = \frac{x+z}{2} \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$, impreuna cu sistemul dat, conduce la sistemul linear de 4 ecuatii cu 3 necunoscute x, y, z

$$\begin{cases} ax + y + z = -1 \\ x + ay + z = -a \\ x + y - z = -2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

unde a este un parametru real.

Fie $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului si

$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 & -a \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea sa extinsa.

Observam ca $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$, deci

$$\mathbf{rang}(\mathcal{A}) \leq 3 \quad (1).$$

Pe de alta parte, conditia de compatibilitate a sistemului (impusa de cerintele problemei), anume

$$\mathbf{rang}(\mathcal{A}) = \mathbf{rang}(\bar{\mathcal{A}}) \quad (2),$$

impreuna cu relatia (1), conduce la egalitatea

$$\mathbf{det}(\bar{\mathcal{A}}) = 0 \quad (3).$$

Intr-adevar, daca $\det(\bar{\mathcal{A}}) \neq 0$, atunci $\text{rang}(\bar{\mathcal{A}}) = 4$, ceea ce, alaturi de relatiile (2) si (1), furnizeaza contradictia

$$\text{rang}(\mathcal{A}) = 4 \leq 3.$$

Sa calculam $\det(\bar{\mathcal{A}})$. Scazand linia 1 din liniile 2 si 4, apoi adunand linia 1 la linia 3, obtinem

$$\begin{aligned} \det(\bar{\mathcal{A}}) &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1-a & a-1 & 0 & 1-a \\ 1+a & 2 & 0 & -3 \\ 1-a & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &(-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1-a & a-1 & 1-a \\ 1+a & 2 & -3 \\ 1-a & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1-a) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1+a & 2 & -3 \\ 1-a & -3 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Adunand coloana 3 la coloana 2 si scazand-o din coloana 1, primim:

$$\det(\bar{\mathcal{A}}) = (1-a) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4+a & -1 & -3 \\ -a & -2 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(8+3a).$$

Astfel, ecuatia (3) are doua solutii, $a = 1$ si $a = -\frac{8}{3}$.

Se observa ca ambele solutii convin, deoarece in ambele situatii este indeplinita relatia (2).

Prof. dr. Daniela Rosca

Prof. dr. Alexandru Mitrea

